

11. Norm, Skalar- und Vektorprodukt

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $(m \times n)$ -Matrix.

Dann heißt $A^T := (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die zu A transponierte Matrix.

Beispiele:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}$

Das ist die Menge aller n -Tupel reeller Zahlen.

Wir wollen diese zunächst als Spalten schreiben, etwa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Wir können dies als Matrix mit 3 Zeilen und 1 Spalte auffassen

$$v^T = (1 \quad -2 \quad 0)$$

Wir nehmen noch ein Element

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dann ist } v^T w = (1 \quad -2 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \downarrow = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 2 = -7$$

Das Matrix-Produkt („Zeile mal Spalte“) liefert hier eine „Matrix“ mit nur einer Zeile und einer Spalte, also eine reelle Zahl.

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ heißt

$$\langle v, w \rangle = v^T w = \sum_{i=1}^n v_i w_i = \boxed{v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n}$$

das (Standard-) Skalarprodukt von v und w

Eigenschaften des Skalarprodukts: Für $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\langle v, cw \rangle = c \langle v, w \rangle$

$$\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

(„Linearität“)

(b) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(„Symmetrie“)

(c) $\langle v, v \rangle \geq 0$

und $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(„positive
Definitheit“)

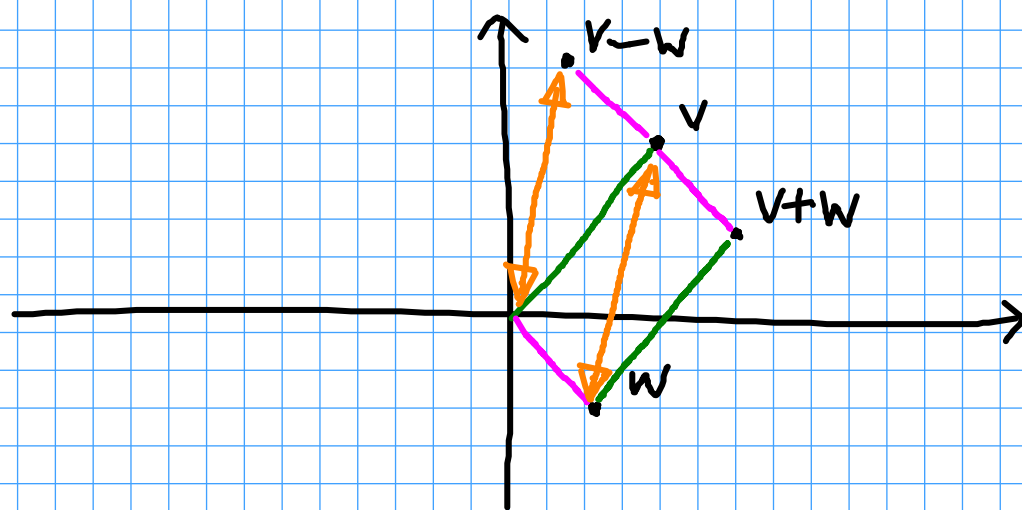
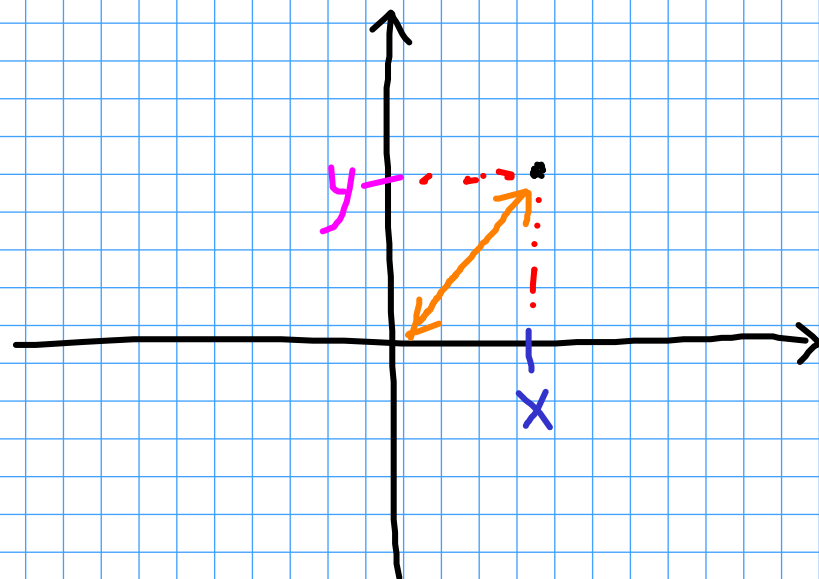
Betrachte nun $\mathbb{R}^2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Der Abstand von $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

zum Nullpunkt beträgt

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$



Der Abstand von v zu w ist genau so groß, wie der Abstand von $v-w$ zum Nullpunkt, also

$$\sqrt{\langle v-w, v-w \rangle}$$

Definition: Für $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ heißt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

die (euklidische) Norm von v

(der Abstand von v zum Nullpunkt)

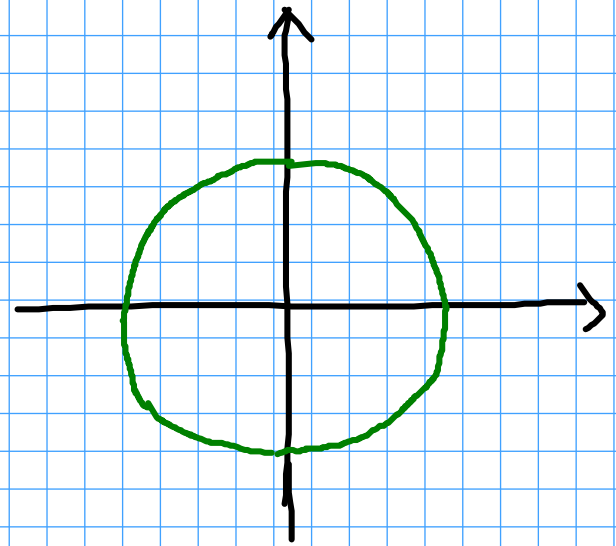
Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ heißt

$$\sqrt{\langle v-w, v-w \rangle} = \|v-w\| \quad \text{der (euklidische) Abstand von } v \text{ und } w$$

Ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ heißt normiert.

Zurück zu $\mathbb{R}^2$:

Die Menge $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\}$
ist ein Kreis um den Nullpunkt
mit Radius 1.



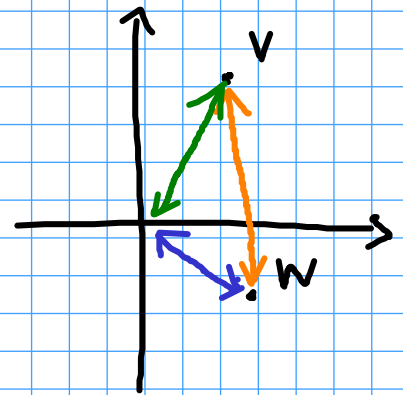
Eigenschaften der Norm: Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\|cv\| = |c| \|v\|$

(b) $\|v-w\| \leq \|v\| + \|w\|$ „Dreiecksungleichung“

(c) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$

„Cauchy-Schwarz-Ungleichung“



Bemerkung: Wegen $(\cdot)$ gilt

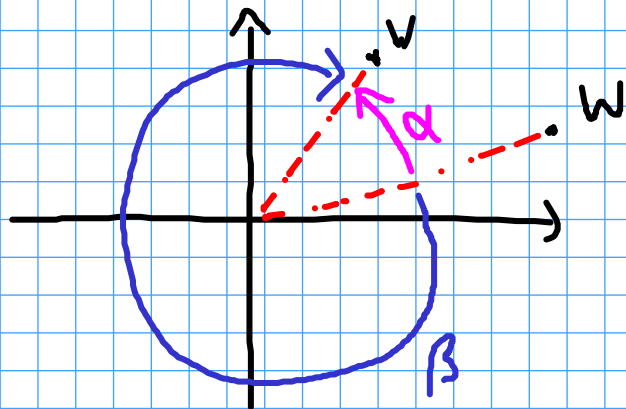
$$\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

falls $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

also
$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

Es gibt genau ein $\alpha \in [0, \pi]$ derart, dass $\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$

Dieses α bezeichnen wir als Winkel zwischen v und w .



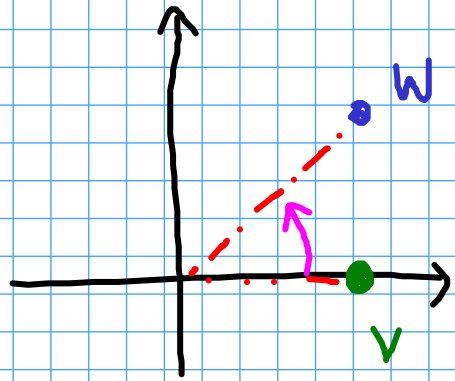
Schreibweise: $\angle(v, w) = \alpha$

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \cos(\beta)$$

$\notin [0, \pi]$

Beispiel:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\alpha)$$

↑
gesucht

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Beobachtung: Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| \neq 0$, $\|w\| \neq 0$. Damit haben wir

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = 0 \iff \langle v, w \rangle = 0$$



$$\cos(\angle(v, w)) = 0 \iff \angle(v, w) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{entspricht } 90^\circ)$$

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zwei Elemente $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen senkrecht (oder orthogonal), wenn $\langle v, w \rangle = 0$

Schreibweise: $v \perp w$

Jetzt $n=3$: Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ heißt

$$v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt von v und w

Es gilt

(a) $(v \times w) \perp v$ und $(v \times w) \perp w$

(b) $\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin(\angle(v, w))$

= Flächeninhalt des Parallelogramms, das von v, w und $v+w$ aufgespannt wird.

